O. Neumaier/C. Sedmak/M. Zichy (Hg.): *Philosophische Perspektiven. Beiträge zum VII. Internationalen Kongress der ÖGP.* Frankfurt/M.–Lancaster 2005: Ontos, 357–363.

GIBT ES WIRKLICH »QUANTOREN« IN FREGES QUANTIFIKATIONSTHEORIE?

EIN BEITRAG ZUR BELEUCHTUNG DER VERWENDUNGSWEISE UNBESTIMMT ANDEUTENDER BUCHSTABEN ZUM AUSDRUCK DER ALLGEMEINHEIT DURCH FREGE

Todor Polimenov (Sofia)

Gottlob Frege gilt zu Recht als Begründer der modernen Logik. Es ist neben der Konzeption eines wahrheitsfunktionalen Aufbaus der komplexen Sätze die Quantifikationstheorie, die zum modernen Paradigmenwechsel in der Logik geführt hat. Nun sind sich die Logikhistoriker darüber einig, dass die Quantifikationstheorie als »Freges eigentliche Erfindung« anzusehen sei. Deswegen scheinen sie auch ohne weiteres bereit zu sein, in Freges logischem System die sog. Quantoren wiederzuerkennen (vgl. z. B. Stevenson 1976, 103). Dagegen könnte man sich vergegenwärtigen, dass Frege weder in seinen Erläuterungen das Wort »Quantor« verwendet noch in seiner Notationsschrift von einem der uns vertrauten Quantorensymbole Gebrauch macht.

Folgende dringliche Frage stellt sich: Entspricht dem, was wir heutzutage durch die Quantorensymbole zum Ausdruck bringen, in Freges System etwas Logisches? Obwohl Frege zwar das Wort »Quantor« bzw. das moderne Quantorensymbol nicht kennt, pflegt man doch sein begriffsschriftliches Höhlungszeichen als Quantorensymbol zu deuten. Also lautet unsere Frage anders formuliert: Liegt der aufgrund des unterschiedlichen Symbolismus Freges vorhandene Unterschied nur in der Bezeichnungsweise, wo ihn die Logikhistoriker ausschließlich sahen, oder geht es dabei nicht nur um eine bloße Notationsverschiedenheit, sondern um eine sachliche Differenz?

In heute gängigen Logikdarstellungen ist es zur Selbstverständlichkeit geworden, zwischen freien und gebundenen *Variablen* zu unterscheiden. Unter einer freien Variablen versteht man im Allgemeinen einen Buchstaben, der dazu dient, in einer Aussagefunktion eine Ersetzbarkeit durch Gegenstandskonstanten anzudeuten. Die Quantifikation erfolgt dadurch, dass diese Variable durch eine isomorphe Variable des Quantors gebunden wird, d. h., es dürfen für sie keine Konstanten mehr eingesetzt werden. Den durch diese »Variablenbindung« entstandenen Ausdruck will man so verstehen, dass damit behauptet wird, dass das in ihm enthaltene Aussagefunktionszeichen für alle Einsetzungen von Gegenstandszeichen zu einem wahren Satz wird. Das Quantorensymbol bringt also einen Operator (oder Funktor) zum Ausdruck, der aus einer Aussagefunktion eine (generelle) Aussage erzeugt. Durch Quantifikation gebundene Variablen fungieren nun objektsprachlich als bloße Pronomina, die sich auf Quantoren beziehen, und durch diesen Quantorenbezug auch metasprachlich als Indizien dafür, dass an ihrer Stelle keine weiteren Einsetzungen erfolgen dürfen. Die freien und gebundenen Variablen sind Buchstaben gleicher Gestalt: man kann sie nur unterscheiden, indem man beachtet, ob die jeweilige Variable auf einen Quantor bezogen ist.

Frege kennt diese Unterscheidung von freien und gebundenen Variablen nicht. Dennoch herrscht unter Frege-Interpreten ein Missverständnis seiner Formelsprache (seiner Begriffsschrift), wenn man behauptet, Freges lateinische Buchstaben seien als freie Variable aufzufassen (Niebel 1995, 70 f.), oder sogar, sie seien freie Variable, die durch den Urteilsstrich (Freges Behauptungszeichen) gebunden werden (Dummett ^{2}1981, 525). Eine weitere Fehldeutung besteht in der noch üblicheren Behauptung, Freges Höhlungssymbol sei sein Zeichen für den Allquantor (bzw. den Alloperator), der durch Bindung der deutschen Buchstaben die Allgemeinheit ausdrückt (Kutschera 1989, 32).

Wenn im fregeschen Logiksystem den freien Variablen Zeichen entsprechen, dann eher die griechischen Buchstaben ›ξ‹, ›ζ‹. Sie dienen zwar nicht direkt zur Andeutung der Möglichkeit, in eine Leerstelle eines Begriffsausdrucks einen Gegenstandsnamen einzusetzen, spielen aber insofern eine z. T. vergleichbare Rolle, als sie dazu dienen, in einem Funktionsausdruck »die Stellen offen zu halten für ein […] [Argument]zeichen, das den Ausdruck ergänzen soll« (Frege 1893, 6). Da sie also allein die Argumentstellen in einem Funktionsausdruck kenntlich machen, kann man sie als bloße Platzhalter oder Leerstellenmarkierer auffassen. Insofern sind diese Buchstaben allerdings metasprachlicher Natur. Sie dürfen ebenso wenig in der Objektsprache des fregeschen Logiksystems (in dessen »begriffsschriftlichen Entwicklungen«) vorkommen, wie in den Sätzen einer natürlichen Sprache auch keine »leeren Stellen« anzutreffen sind. Frege gebraucht sie deshalb nur bei »Erläuterungen« und der Darstellung seiner Begriffsschrift (Frege 1893, 6, Anm.).

Dagegen überträgt Frege den lateinischen Buchstaben ›*x*‹, ›*y*‹ eine wichtige Aufgabe in den objektsprachlichen Entwicklungen der Begriffsschrift, und zwar sollen sie in der Zeichenrelation der »unbestimmten Andeutung von

Gegenständen« zum Ausdruck der Allgemeinheit dienen. Sie sind weder bloße metasprachliche Leerstellenmarkierer wie ›ξ‹, ›ζ‹, noch Eigennamen (Gegenstandszeichen) wie ›Δ‹, ›Γ‹, noch Freges deutsche Buchstaben, die nur in Verbindung mit Höhlungszeichen vorkommen dürfen (und deshalb in der Folgezeit irrtümlich als Freges gebundene Variablen wiedererkannt wurden), sondern sie deuten einfach Gegenstände unbestimmt an. Die Frage ist nun: Können die lateinischen Buchstaben allein die Allgemeinheit ausdrücken? Mit anderen Worten: Lässt sich die Quantifikation auf die Verwendung lateinischer Buchstaben zurückführen? Und wenn das möglich wäre, worin müsste dann die Rolle von Freges angeblichen Quantorenzeichen bestehen, mittels derer nach der Deutung der modernen Logiker erst ein allgemeiner Satz erzeugt werden soll?

Da Frege für jede unterschiedliche Verwendungsweise von Variablen eine besondere Art von Buchstaben einführt, braucht er nicht dieselben Buchstaben einmal als freie, ein andermal als gebundene Variable zu erklären und den Unterschied in deren Bindung durch Quantoren zu suchen. Er kann einfach festsetzen: ›$\Phi(x)$‹ *bedeutet das Wahre, wenn der Wert der Funktion $\Phi(\xi)$ für jedes beliebige Argument das Wahre ist; in allen anderen Fällen bedeutet es das Falsche.* So wird die Allgemeinheit einer Funktion ausschließlich anhand lateinischer Buchstaben zum Ausdruck gebracht. Und Frege (1893, 11) erörtert zwar versuchsweise, aber ganz ernsthaft zuerst eben diese Möglichkeit, die Allgemeinheit auszudrücken. Bald stößt er allerdings auf Schwierigkeiten, indem er bei der Bezeichnungsweise mit lateinischen Buchstaben zwischen der Allgemeinheit der Verneinung und der Verneinung der Allgemeinheit zu unterscheiden versucht: Ergänze man das Verneinungszeichen ›─┬─ξ‹ durch den Ausdruck ›$\Phi(x)$‹, so sei es nicht klar, ob man mit dem Satz ›─┬─$\Phi(x)$‹ geschrieben habe, dass der Wert der Funktion $\Phi(\xi)$ für jedes beliebige Argument das Falsche sei (d. i. die Allgemeinheit der Verneinung), oder ob man damit geschrieben habe, dass der Wert der Funktion $\Phi(\xi)$ nicht für jedes beliebige Argument das Wahre sei (d. i. die Verneinung der Allgemeinheit). Deswegen entscheidet sich Frege dafür, ein Zeichen einzuführen, das die Unterscheidung zwischen diesen beiden Fällen ermöglicht, und eben dieses Zeichen wird dann von Logikhistorikern als das fregesche Quantorensymbol gedeutet.

Dass dieses Zeichen (das sog. Höhlungssymbol) aber nicht einen Quantor (bzw. Operator) bezeichnet, der aus einer Aussagefunktion eine allgemeine Aussage erst erzeugt, sondern nur das Gebiet der Allgemeinheit abgrenzt, d.h. zeigt, auf welchen Teil eines komplexen Ausdrucks sich die Generalisierung erstreckt, will ich mit Hilfe der folgenden Überlegung nachweisen. Ich verzichte vorerst auf Freges Höhlungssymbol und die dazugehörigen deutschen Buchstaben und bediene mich stattdessen einfach eckiger Klammern, um damit in einem komplexen Ausdruck eine Grenze des Gebiets der Allgemeinheit zu ziehen, und auch wieder lateinischer Buchstaben. Dabei knüpfe ich an Freges versuchsweise gemachte Festsetzung an: *›$\Phi(x)$‹ bedeutet das Wahre, wenn der Wert der Funktion $\Phi(\xi)$ für jedes beliebige Argument das Wahre ist; in allen anderen Fällen bedeutet es das Falsche.*

Mit ›$\Phi(x)$‹ werden wir also die Allgemeinheit der Funktion $\Phi(\xi)$ angeschrieben haben. Daraus ist zu entnehmen, dass hier die Allgemeinheit einfach dadurch zum Ausdruck kommt, dass ein lateinischer Buchstabe in die Argumentstelle eines Funktionszeichens eingesetzt wird. Wenn $\Phi(\xi)$ ein Begriff ist, dann kann man ›$\Phi(x)$‹ z. B. so lesen: »alles ist Φ« oder »für jedes Ding gilt, dass es Φ ist«.

Allgemeinheit lässt sich aber sinnvoll nur von Begriffen und Beziehungen, kurz nur von Funktionen, deren Werte Wahrheitswerte sind, aussagen. Frege führt sie daher auf der Grundlage der Waagerechten-Funktion $—\xi$ ein, die aus einer beliebigen Funktion $\Phi(\xi)$ immer einen Begriff $—\Phi(\xi)$ sowie aus einem beliebigen Gegenstand Δ immer einen Wahrheitswert $—\Delta$ erzeugt.

Gemäß unserer Erklärung der lateinischen Buchstaben haben wir also mit ›$—\Phi(x)$‹ hingeschrieben, dass der Wert der Funktion $—\Phi(\xi)$ für jedes beliebige Argument das Wahre ist. Die Zeichenverbindung ›$—\Phi(x)$‹ kann in Worten z. B. so gelesen werden: »für jedes Ding gilt: Φ von ihm – das ist identisch mit dem Wahren«. In ›$—\Phi(x)$‹ haben wir die Allgemeinheit der Funktion $—\Phi(\xi)$ ausgedrückt, wobei diese Funktion die Ineinandersetzung der Funktionen $—\xi$ und $\Phi(\xi)$ bzw. deren Verknüpfung darstellt: Fregeanisch gesprochen ist $—\xi$ die umschließende und $\Phi(\xi)$ die umschlossene Funktion.

Wenn wir nun schreiben: ›—┬—$\Phi(x)$‹, so bringen wir damit zum Ausdruck, dass der Wert der Funktion ›—┬—$\Phi(\xi)$‹ für jedes beliebige Argument das Wahre ist. Das ist aber genau die Allgemeinheit der Verneinung der Funktion $—\Phi(\xi)$ und nicht die Verneinung ihrer Allgemeinheit.

Wollen wir aber andererseits die Allgemeinheit der Funktion $—\Phi(\xi)$ (bzw. den allgemeinen Gedanken $—\Phi(x)$) verneinen, so können wir für diesen Fall eckige Klammern zur Abgrenzung des Allgemeinheitsgebiets einführen und einfach schreiben: ›—┬—[$—\Phi(x)$]‹. Damit ist (der Wahrheitswert davon) verneint, dass der Wert der Funktion $—\Phi(\xi)$ für jedes beliebige Argument das Wahre ist, und das ist eben die Verneinung der Allgemeinheit.

Mit unserer Symbolik sind wir jetzt im Stande, auch einen Existenzsatz auszudrücken bzw. durch lateinische Buchstaben (zum Ausdruck der Allgemeinheit), eckige Klammern (zur Abgrenzung des Allgemeinheitsgebiets), Verneinungsstriche (zur Verneinung) und Waagerechte (zur Begriffserzeugung aus einer beliebigen Funktion) den sog. Existenzquantor zu ersetzen: ›—┬—[—┬—Φ(*x*)]]‹. Damit haben wir (den Wahrheitswert davon) verneint, dass der Wert der Funktion —┬—Φ(ξ) für jedes beliebige Argument das Wahre ist, also haben wir geschrieben: Der Wert der Funktion —┬—Φ(ξ) ist nicht für jedes beliebige Argument das Wahre, oder: Es gibt mindestens ein Argument, für welches der Wert der Funktion ——Φ(ξ) das Wahre ist.

Daraus ist zu ersehen, dass auch eine Prädikatenlogik ohne die üblichen Quantoren möglich wäre, sollte man nur solche Sätze in Betracht ziehen, in denen bloß *eine* Quantifizierung vorgenommen wird. Wie aber verhält sich die Sache bei mehrfacher Quantifikation? Indem wir Freges Höhlungssymbol in Form eckiger Klammern wiedergeben, haben wir keine Schwierigkeiten mehr, dem Unterschied zwischen Allgemeinheit der Verneinung und Verneinung der Allgemeinheit gerecht zu werden. Mit diesen Ausdrucksmitteln sind wir jedoch noch nicht in der Lage, *verschachtelte* Quantifizierungen zu analysieren, denn bei mehrfachem Vorkommen von Klammern wird nicht mehr klar sein, welche Klammern wessen Allgemeinheit abgrenzen. Das dürfte der eigentliche Grund dafür gewesen sein, dass Frege seine berühmte Höhlungsnotation mit den über der Höhlung stehenden deutschen Buchstaben eingeführt hat.

Freges vermeintliche »Quantoren« sind also nicht die Operatoren, die aus einer Aussagefunktion eine generelle Aussage erzeugen. Das Höhlungssymbol ist nicht Freges Ausdruck der Allgemeinheit. Es (ggf. mit den deutschen Buchstaben) dient nur dazu, innerhalb einer Aussage zu zeigen, wo das Gebiet einer durch unbestimmt andeutende Buchstaben ausgedrückten Allgemeinheit (ggf. in verschachtelten Gebieten anderer Generalisierungen) abgegrenzt wird. In einfachen Quantifikationsfällen, in denen es nur um die Unterscheidung von Allgemeinheit der Verneinung und Verneinung der Allgemeinheit einer einzigen Quantifizierung geht, werden wir dieses Symbol nicht nötig haben, wenn wir es z. B. durch Klammern ersetzen. Aber auch bei verschachtelten Quantifizierungen können wir auf die Höhlungszeichen verzichten, wenn wir nur unsere Klammern z. B. mit Indizes in Form hochgestellter Buchstaben versehen, die darauf hinweisen, welche Klammern auf welche lateinischen Buchstaben bezogen werden, d. h., welche Klammern wessen Gebiet abgrenzen. So können wir, wenn wir als lineare Schreibweise für die begriffsschriftliche

»Bedingtheit« z. B. die Zeichenverbindung ›$—\xi \supset —\zeta$‹ verwenden, die »Eindeutigkeit« der Funktion $\Phi(\xi,\zeta)$ wie folgt mit Klammern, lateinischen Buchstaben und deren Indizes ausdrücken:

›$^{x}[^{y}[—\Phi(x, y) \supset —^{z}[—\Phi(x, z) \supset —y = z]\ ]]$‹ (vgl. Frege 1893, 40).

Da für Frege also der eigentliche Ausdruck der Allgemeinheit nicht im Höhlungszeichen, sondern ausschließlich in den unbestimmt andeutenden Buchstaben liegt, dürfen wir sie als Allgemeinheitsbuchstaben bezeichnen.

Es wird allzu oft nicht auseinandergehalten, dass wir es hier mit zweierlei zu tun haben: Zum einen führen wir eine Notation ein, die zum Ausdruck der Allgemeinheit dient, und zum anderen erfinden wir eine Schreibweise, die die symbolische Darstellung von verschachtelten Quantifizierungen und deren Negationen ermöglicht. So bezeichnet z.B. H. Hermes in seiner Einleitung zu Frege (^{2}1983, XI) das bloße Höhlungssymbol als Freges »Zeichen für die Allgemeinheitsbegriffe«. Dagegen hat sich gerade gezeigt, dass Frege das Höhlungszeichen mit den deutschen Buchstaben eigens für die symbolische Darstellung von verschachtelten Quantifizierungen und deren Negationen einführt, während er im Stande ist, bei einer einzigen Quantifizierung die Allgemeinheit selbst ohne das Höhlungszeichen auszudrücken, und auch bei der mehrfachen Quantifikation steckt für Frege der Ausdruck der Allgemeinheit eigentlich in den unbestimmt andeutenden Buchstaben (vgl. auch Frege ^{2}1983, 280).

Wir können nun zusammenfassen: (1) unbestimmt andeutende Buchstaben dienen *eo ipso* zum Ausdruck der Allgemeinheit (dadurch lässt sich die Allquantifizierung einführen); (2) ein bloßes Höhlungszeichen ist einer Klammer gleichzusetzen, d. h., es grenzt das Gebiet eines Allgemeinheitsbuchstabens ab (dadurch lässt sich die Unterscheidung von Allgemeinheit der Verneinung und Verneinung der Allgemeinheit einführen); (3) über dem Höhlungszeichen stehende deutsche Buchstaben fungieren als Index dafür, welche Grenze welchem Allgemeinheitsbuchstaben angehört (dadurch lassen sich verschachtelte Quantifizierungen einführen). So wird durch diese komplexe Notation Freges Verlangen erfüllt, »auf die Elemente, auf das Einfache zurückzugehen«.

LITERATUR

Dummett, M. (^{2}1981), *Frege. Philosophy of Language.* Cambridge/MA: Harvard University Press.

Frege, G. (1891), *Function und Begriff.* Jena: Pohle.

Frege, G. (1893), *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet.* I. Bd. Jena: Pohle.

Frege, G. (²1983), *Nachgelassene Schriften.* Hg. von H. Hermes u. a. Hamburg: Meiner.

Kutschera, F. von (1989), *Gottlob Frege. Eine Einführung in sein Werk.* Berlin–New York: de Gruyter.

Niebel, W. F. (1995), Gibt es einen Dualismus in Freges Quantifikationskonzeption?, in: Max, I./Stelzner, W., Hg. (1995), *Logik und Mathematik. Frege-Kolloquium in Jena 1993.* Berlin–New York: de Gruyter, 68–81.

Stevenson, L. (1976), Freges zwei Definitionen der Quantifikation, in: Schirn, M., Hg. (1976), *Studien zu Frege II. Logik und Sprachphilosophie.* Stuttgart–Bad Cannstatt: Frommann–Holzboog, 103–124.